جو أكاديمي
الصفوف

المادة: رياضيات

الصف: التاسع

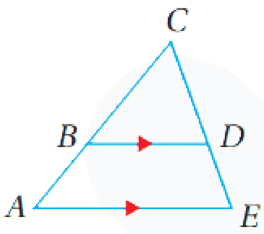
ملخص الوحدة

الأجزاء المتناسبة في المثلثات

أولاً : الأجزاء المتناسبة في المثلث

ما المقصود بنظرية التناسب في المثلثات ؟

بالكلمات : اذا وازى مستقيم ضلعاً من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الأخرين فإنه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة وأطوالها متناسبة .

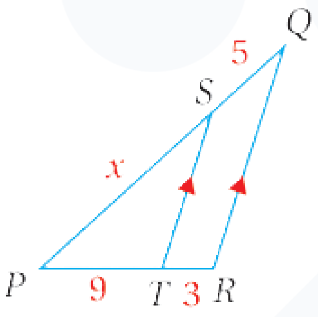


بالرموز : اذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ فان $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$

يمكن استخدام نظرية الأجزاء المتناسبة في المثلث لايجاد اطوال قطع مستقيمة مجهولة

مثال 1

في ΔPQR إذا كان $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$, $SQ = 5 , PT = 9 , TR = 3$ ، فأجد PS .



نظرية الأجزاء المتناسبة
$$\frac{SQ}{PS} = \frac{TR}{PT}$$

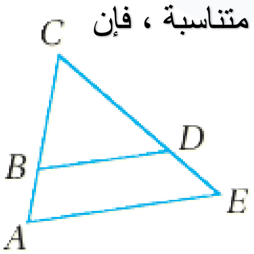
بالتعويض
$$\frac{5}{X} = \frac{3}{9}$$

بالتبسيط
$$\frac{5}{X} = \frac{1}{3}$$

باستعمال خاصية الضرب التبادلي
$$X = 15$$

ثانياً : عكس نظرية التناسب في المثلث

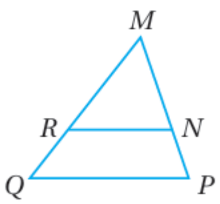
بالكلمات :اذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث ، وقسمهما الى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة ، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث



بالرموز : إذا كان $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$, فإن $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$

يمكن استخدام عكس نظرية الأجزاء المتناسبة في المثلث لايجاد اطوال قطع مستقيمة مجهولة .

مثال 2



في ΔQMP إذا كان $RQ = 4 , MN = 12 , NP = 3 , MR = 16$ فأحدد اذا كان $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ ، مبررا إجابتي

الحل:

$\frac{RQ}{MR} = \frac{4}{16}$ بالتعويض

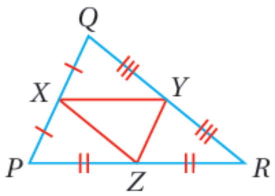
$= \frac{1}{4}$ بالتبسيط

$\frac{NP}{MN} = \frac{3}{12}$ بالتعويض

$= \frac{1}{4}$ بالتبسيط

وبما أن $\frac{NP}{MN} = \frac{RQ}{MR}$ وبحسب عكس نظرية التناسب في المثلث فإن $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$

ثالثاً : القطعة المنصفة في المثلث



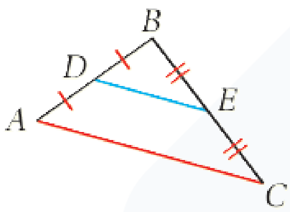
هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث وفي كل مثلث ثلاث قطع منصفة فمثلا: القطع المنصفة في ΔPQR المجاور هي : $\overline{XY}, \overline{YZ}, \overline{XZ}$

توجد علاقتان بين القطعة المنصفة في المثلث والضلع المقابل لها ، وهما موضحتان في النظرية الاتية .

بالكلمات : القطعة المنصفة في المثلث توازي الضلع المقابل لها ، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع .

بالرموز : اذا كانت النقطة D والنقطة E هما نقطتي منتصف AB و BC

على الترتيب فإن : $DE = \frac{1}{2}AC$ و $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.

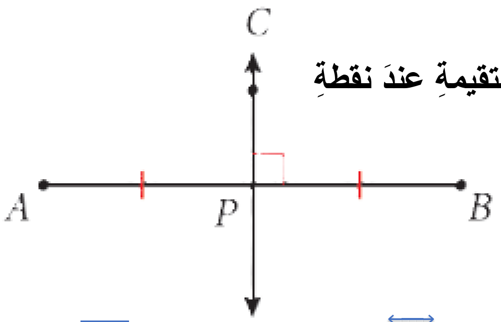


يمكن استعمال نظرية القطعة المنصفة في المثلث لإيجاد أطوال قياسات مجهولة .

منصفات في المثلث

أولاً : المُنصّفُ العموديُّ

المُنصّفُ العموديُّ لقطعةٍ مستقيمةٍ هوَ مستقيمٌ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ عندَ نقطةِ منتصفِها .

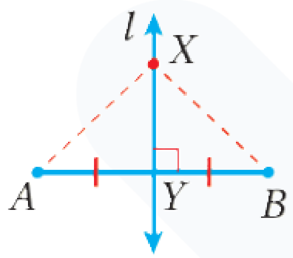


المنصف العمودي ل $\overline{AB}$ $\overleftrightarrow{CP}$

نظرية المُنصّفِ العموديّ:

كلُّ نقطةٍ على المُنصّفِ العموديّ لقطعةٍ مستقيمةٍ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيِ القطعةِ المستقيمةِ.

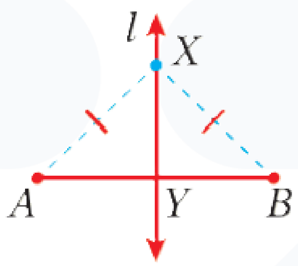
مثال : إذا كانَ l مُنصّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$ ، فإنَّ $AX = BX$ لأيّ نقطةٍ X على l .



عكس نظرية المُنصّفِ العموديّ:

كلُّ نقطةٍ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيْ قطعةٍ مستقيمةٍ تقعُ على المُنصّفِ العموديّ لتلكَ القطعةِ .

مثال : إذا كانَ $AX = BX$ و l مُنصّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$ فإنَّ X تقعُ على l



يمكنني ايجاد معادلة اي مستقيم إذا علم ميله ونقطة يمر بها ، ومن ثم فإنه يمكنني ايجاد معادلة المنصف العمودي **"باستعمال صيغة نقطة المنتصف لأي قطعة مستقيمة"**

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

صيغة الميل :

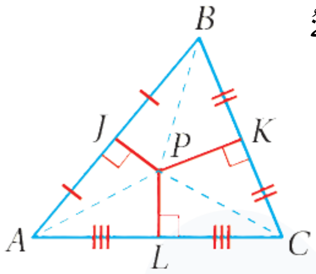
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ثانيًا : المُنصِّفاتُ العموديةُ للمُثلَّث، ومركزُ الدائرةِ الخارجيةِ .

- إذا تلاقَتْ ثلاثةُ مستقيماتٍ أوْ أكثرُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ، فإنَّ هذهِ المستقيماتِ تُسمّى مستقيماتٍ مُتلاقِيةً، وتُسمّى النقطةُ التي تلتقي فيها المستقيماتُ نقطةَ التلاقي.
- بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثةَ أضلاعٍ، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصِّفاتٍ عموديةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

تلتقي المُنصِّفاتُ العموديةُ لأضلاعِ مُثلَّثٍ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلِّ منْ رؤوسِ المُثلَّثِ.

مثالٌ : إذا كانَتْ $\overline{PJ}, \overline{PL}, \overline{PK}$ هيَ المُنصِّفاتِ العموديةَ لـ $\triangle ABC$، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها ، فإنَّ $PA = PB = PC$



تذكّر :

يوجدُ فرقٌ بينَ المُنصِّفِ العموديِّ للمُثلَّثِ والقطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّث:

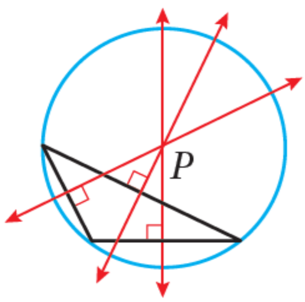
فالقطعةُ المُنصّفةُ تُنصِّفُ الضلعينِ اللذينِ يتقاطعانِ معها، ولا يكونُ التقاطعُ عموديًّا بالضرورةِ،

أمّا **المُنصِّفُ العموديُّ** فهوَ مُنصِّفٌ لضلعٍ واحدٍ في المُثلَّثِ، وهوَ عموديٌّ بالضرورةِ على ذلكَ الضلعِ.

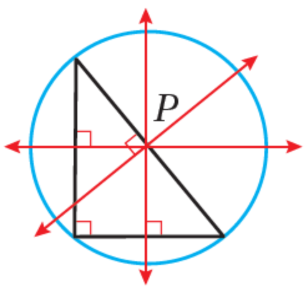
مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّث هي نقطةُ تلاقي المُنصّفاتِ العموديةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما.

وهيَ دائرةٌ تمرُّ برؤوسِ المُثلَّثِ جميعِها ؛ إذْ إنَّ نقطةَ تلاقي المُنصِّفاتِ العموديةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ؛ لذا فهيَ مركزٌ للدائرةِ الخارجيةِ.

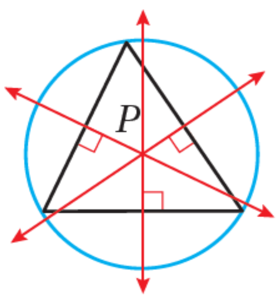
يعتمدُ موقعُ مركزِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ :



مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

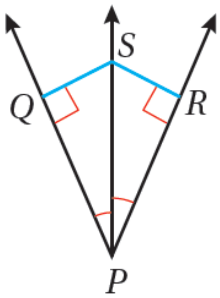


مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P على وترِ المُثلَّثِ.



مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

ثالثًا : مُنصِّفُ الزاويةِ

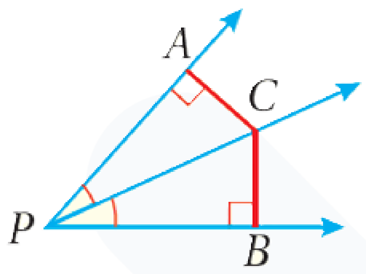


تعلم أنَّ **مُنصِّفَ الزاويةِ** هو شعاعٌ يُقسِّمُ الزاويةَ إلى زاويتينِ مُتطابِقتينِ ، وتعلَّمْتُ أيضًا أنّ البُعْدَ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليْهِ هوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديةِ على المستقيمِ منْ تلكَ النقطةِ.

ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $\overrightarrow{PS}$ في الشكلِ المُجاورِ مُنصِّفٌ لـ $\angle QPR$ وإنَّ البُعْدَ بينَ النقطةِ S و $\overrightarrow{PQ}$ هو SQ

نظرية مُنصِّفِ الزاويةِ:

كلُّ نقطةٍ على مُنصِّفِ الزاويةِ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها.

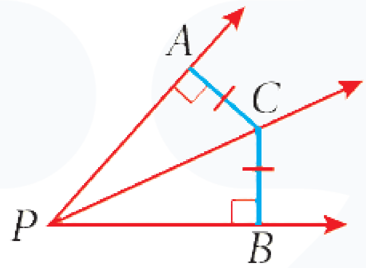


مثال : إذا كان $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفًا لـ $\angle APB$

وكانَ $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{PA}$ ، فإنَّ $CA = CB$

عكس نظرية منصف الزاوية :

إذا وقعَتْ نقطةٌ داخلَ زاويةٍ، وكانَتْ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها، فإنَّها تقعُ على مُنصِّفِ الزاويةِ.



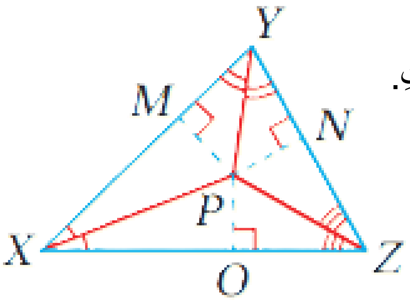
مثال: إذا كان $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{PA}, CA = CB$ ،

فإنَّ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفٌ لـ $\angle APB$.

رابعًا : مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ ، ومركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.

بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثَ زوايا، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصِّفاتٍ للزوايا تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ



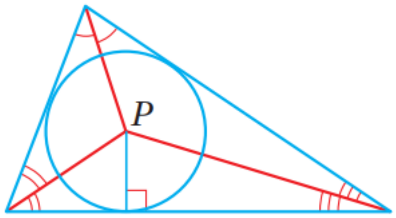
تلتقي مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

مثال: إذا كانَت $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$. هيَ مُنصِّفاتِ زوايا

$\triangle XYZ$ وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها،

فإنَّ $PM = PN = PO$

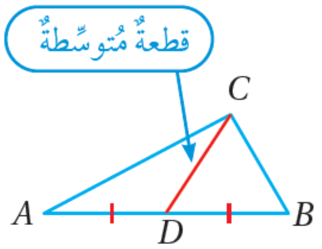
مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ هي نقطةُ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ وهيَ دائرةٌ تمسُّ أضلاعَ المُثلَّثِ جميعَها ؛ ذلكَ أنَّ نقطةَ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ أضلاعِهِ ؛ ما يعني أنَّها مركزُ الدائرةِ الداخليةِ.



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

أولًا : القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ

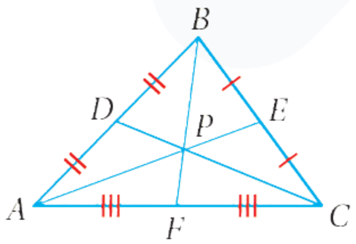
القطعةُ المُتوسِّطةُ للمُثلَّثِ: هيَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ..



- لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُتوسِّطةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى مركزَ المُثلَّثِ.

نظرية (مركزُ المُثلَّثِ)

يبعدُ مركزُ المُثلَّثِ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ ثلثيْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

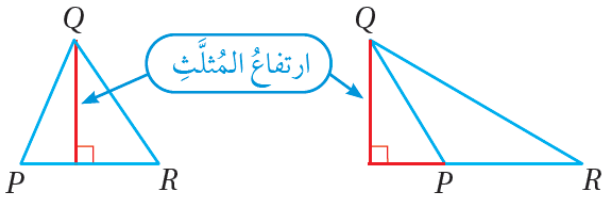


مثال : إذا كانَ P مُنصِّفًا عموديًّا هيَ مركزَ $\triangle ABC$ ، فإنَّ :

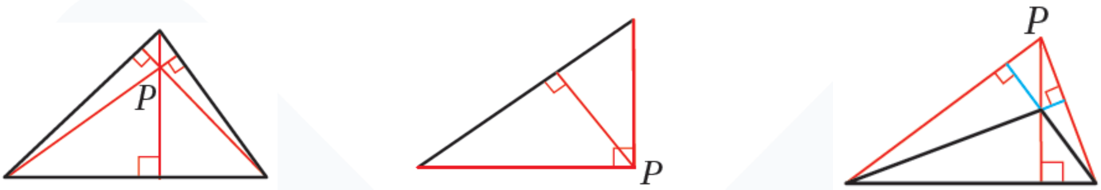
$$AP = \frac{2}{3}AE, \qquad BP = \frac{2}{3}BF, \qquad CP = \frac{2}{3}CD$$

ثانيًا :ارتفاعاتُ المُثلَّثِ

ارتفاعُ المُثلَّثِ : هوَ القطعةُ المستقيمةُ العموديةُ النازلةُ منْ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ إلى الضلعِ المُقابِلِ لها، أوْ إلى المستقيمِ الذي يحوي الضلعَ المُقابِلَ لها.



لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثةُ ارتفاعاتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ تُسمّى ملتقى الارتفاعاتِ ويعتمدُ موقعُها على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:

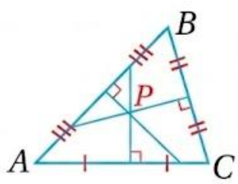
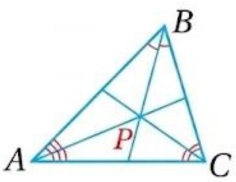
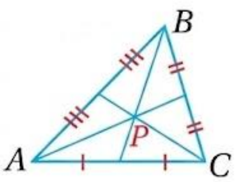
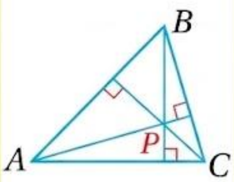


مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.

مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

ملخَّص المفهوم .. قطع مستقيمة ونقاط خاصة في المثلث

	المُنصِّفاتُ العموديةُ	مُنصِّفاتُ الزوايا	القطعُ المُتوسِّطةُ	الارتفاعاتُ
نقطةُ التلاقي	مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ المُثلَّثِ.	ملتقى الارتفاعاتِ.
الخاصيةُ	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ رؤوسِهِ.	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ أضلاعِهِ.	النقطةُ P مركزُ ΔABC، وهيَ تبعدُ عنْ كلِّ رأسٍ ثلثيْ طولِ القطعةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.	النقطةُ P هيَ ملتقى ارتفاعاتِ ΔABC.
مثالٌ				

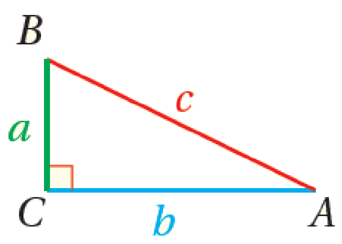
النسب المثلثية

أولًا : النسبُ المُثلَّثيةُ

النسبةُ المُثلَّثيةُ :هيَ نسبةٌ بينَ طولَيْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

نظرية (النسبُ المُثلّثية)

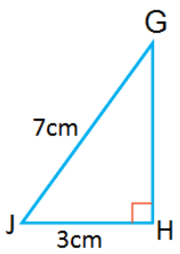
إذا كانَ ΔABC قائمَ الزاويةِ، وكانَت $\angle A$ زاويةً حادَّةً فيهِ، فإنَّ نسبَ المُثلَّثِ التي هيَ أكثرُ شيوعًا تُعرَفُ بدلالةِ الوترِ، والضلعِ المُقابِلِ، والضلعِ المُجاورِ كما يأتي:



الجيبُ (sine)	$SIN\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$
جيبُ التمامِ(cosine)	$cos\ A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$
الظلُّ(tangent)	$tan\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$

مثال 1

أجدْ قِيَمَ النسبِ المُثلّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ G في المُثلّثِ المُجاورِ.



الحل:

أولاً : أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ GH

نظريةُ فيثاغورس	$(JG)^2 = (HG)^2 + (JH)^2$
بتعويض $JG = 7, JH = 3$	$(7)^2 = (HG)^2 + (3)^2$
بالتبسيطِ	$49 = (HG)^2 + 9$
بطرح 9 من طرفي المعادلة	$(HG)^2 = 40$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ	$HG = \pm\sqrt{40}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $HG = \sqrt{40}$

ثانياً : أجدُ النسبَ المُثلّثيةَ الثلاث

$\tan G = \frac{JH}{HG} = \frac{3}{\sqrt{40}}$	$\cos G = \frac{HG}{JG} = \frac{\sqrt{40}}{7}$	$\sin G = \frac{JH}{JG} = \frac{3}{7}$

ثانيًا : النسبُ المُثلَّثيةُ، والآلةُ الحاسبةُ

يُمكِنُنا إيجادُ قِيَمِ النسبِ المُثلَّثيةِ لزوايا معلومةٍ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أتعلَّمُ

أضبطُ الآلةَ الحاسبةَ على خيارِ (DEGREES) قبلَ استعمالِها.

مثال 2

أجدُ قيمة $\sin 40°$ باستعمال الآلة الحاسبة ، مقرباً اجابتي الى اقرب ثلاث منازل عشرية :

الحل:

اضغط على مفتاح sin ، ثمَّ أدخِلُ القيمةَ 40 ، ثمّ اضغط على مفتاح = فتظهر النتيجة :

$$sin 40° = 0.642787609687$$

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.643

ثالثاً : معكوسِ النسبةِ المُثلَّثيةِ

فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الجيبِ $(\sin^{-1})$ ، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ جيبِ التمامِ $(\cos^{-1})$ ، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الظلّ $(\tan^{-1})$.

لغة الرياضيات

- **يُقرَأُ معكوسُ الجيبِ sine inverse** : ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $(\sin^{-1})$
- **يُقرَأُ معكوسُ جيبِ التمامِ cosine inverse** : ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $(\cos^{-1})$
- **يُقرَأُ معكوسُ الظلِّ tan inverse** : ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $(\tan^{-1})$

ثالثًا : العلاقةُ بينَ الجيبِ وجيبِ التمامِ

نظرية (مُتطابِقةَ فيثاغورس) :

في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، حيثُ A زاويةٌ حادَّةٌ في المُثلَّثِ، فإنَّ :

$$sin^2 A + cos^2 A = 1$$

متى نستخدم متطابقة فيثاغورس؟

عندما يكون غير معطى بالسؤال أطوال للمثلث المعطى و إنما معطى قيمة لإقتران مثلثي .

رابعًا :الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

مفهومٌ أساسيٌّ ... الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

إذا كانَ A و B زاويتينِ مُتتامَّتينِ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، فإنَّ:

$$\sin A = \cos(90° - A) = \cos B$$

$$\cos A = \sin(90° - A) = \sin B$$

$$\sin B = \cos(90° - B) = \cos A$$

$$\cos B = \sin(90° - B) = \sin A$$

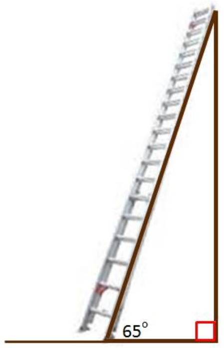
تطبيقات النسب المثلثية

أولًا : استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ

يُمكِنني استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ أطوالِ أضلاعٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ في كثيرٍ منَ السياقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ. أنظر المثال التالي :

مثال 1

وُضعَ سلّم على طرف جدار كما في الرسم المُجاور ، وكانت الزاوية التي يصنعُها السّلّم مع الأرض هي $65°$ أجدُ ارتفاع طرف السُلّم عن سطح الأرض إذا كان طولُهُ $8m$ ؟



الحل :

ألاحِظُ منَ الشكلِ تكوّن مثلث قائم الزاوية (سطح الأرض وارتفاع الجدار وطول السلم).

وأنَّ الزاويةَ المعلومة هيَ 65°، وأنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لها هوَ المطلوب (يُمثِل ارتفاع طرف السلم العلوي عن الأرض)، وأنَّ طول السلم يمثل وتر في هذا المثلث.

إذن أستخدم نسبة الجيب لإيجاد ارتفاع طرف السلم العلوي عن الأرض.

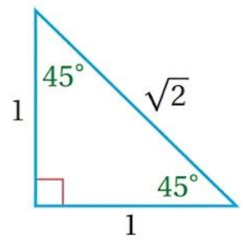
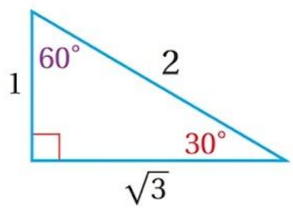
أفرض أنّ طول الضلع المقابل للزاوية 65° يساويR

$\sin A = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	نسبةُ الجيبِ
$\sin 65° = \dfrac{R}{8}$	بالتعويضِ
$8(\sin 65°) = R$	بالضربِ التبادلي
$R \approx 7.25$	باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ : ارتفاع طرف السلم العلوي عن الأرض يساوي $7.25m$ تقريبًا .

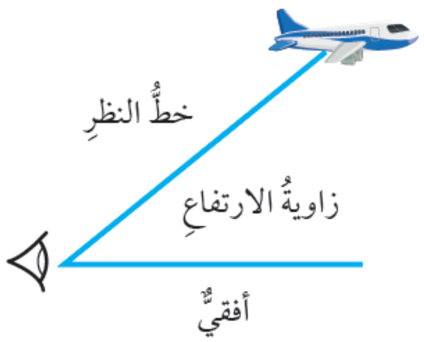
ثانيًا :استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ في المُثلَّثاتِ الخاصةِ

مفهومٌ أساسيٌّ ... النسب المثلثية للزوايا الخاصة

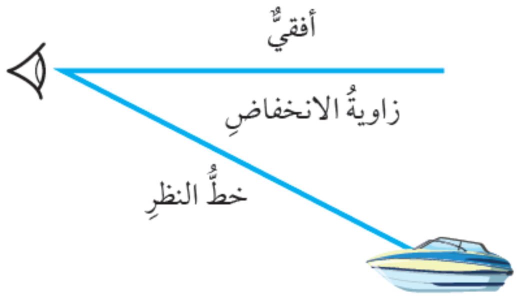
<table>
<tr><th>الظلُّ</th><th>جيبُ التمامِ</th><th>الجيبُ</th><th>المُثلَّثُ</th></tr>
<tr><td>$\tan 45^\circ = 1$</td><td>$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$</td><td>$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$</td><td>$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>
</td></tr>
</table>

ثالثًا :زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ

يُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأعلى والخطِّ الأفقيِّ اسمُ زاويةِ الارتفاعِ ، **مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ سطحِ الأرضِ إلى طائرةٍ في السماءِ والخطِّ الأفقيِّ .**



ويُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأسفلِ والخطِّ الأفقيِّ اسمُ زاويةِ الانخفاضِ، **مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ منْ منارةٍ إلى سفينةٍ في البحرِ والخطِّ الأفقيِّ.**



تبسيط المقادير الأسية

أولًا : تبسيط المقاديرِ الأسّيّة باستعمال خصائص ضرب الأُسس

مفهومٌ أساسيّ ... خصائصُ ضربِ الأُسس

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ:

مثال		الخاصية
$z^2 \times z^6 = z^{2+6} = z^8$	ضربُ القوى	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(h^3)^2 = h^{3\times2} = h^6$	قوّةُ القوّةِ	$(a^m)^n = a^{mn}$
$(5w)^3 = 5^3w^3 = 125w^3$	قوّةُ ناتجِ الضربِ	$(ab)^m = a^m b^m$

مفهوم أساسيّ ... أبسطُ صورة للمقدار الأسّيّ

يكونُ المقدار الأسّيّ في أبسط صورة إذا توافرت فيه الشروط الآتية :

- أنْ يظهر الأساس مَرّة واحدة فقط، وأن تكون الأُسس جميعُها موجبة .
- ألّا يتضمَّن المقدار قوّة القوّة.
- أنْ تكون الكسور جميعُها في أبسط صورة.

ثانيًا : تبسيطُ المقاديرِ الأُسّيَّةِ باستعمالِ خصائصِ قسمةِ الأُسسِ

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، حيثُ $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ :

مثال		الخاصية
$z^2 \times z^6 = z^{2+6} = z^8$	ضربُ القوى	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(h^3)^2 = h^{3\times2} = h^6$	قوّةُ القوّةِ	$(a^m)^n = a^{mn}$
$(5w)^3 = 5^3w^3 = 125w^3$	قوّةُ ناتجِ الضربِ	$(ab)^m = a^m b^m$

ثالثًا : تبسيطُ المقاديرِ الأُسّيةِ باستعمال خصائص الأسّ الصفريّ والأسّ السالبِ

مفهومٌ أساسيٌّ ... الأُسُّ الصفريُّ والأُسُّ السالبُ

إذا كان a عددًا حقيقيًّا أو مقدارًا جبريًّا، حيث $a \neq 0$ ، وكان n عددًا صحيحًا، فإنَّ:

الخاصية		مثال
$a^0 = 1$	الأسُّ الصفريُّ	$(3x^2)^0 = 1 \,, x \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	الأسُّ السالبُ	$g^{-7} = \frac{1}{g^7} \,, g \neq 0$

العمليات على المقادير الجبرية

اولاً : تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ الضربِ

يُطلَقُ على المقاديرِ العدديةِ أوِ المقاديرِ الجبريةِ التي تحوي جذورًا اسمُ المقاديرِ الجذريةِ ، التي يكونُ كلٌّ منْها في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ :

- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ عواملَ (ما عدا العددَ 1) يُمكِنُ كتابتُها في صورةِ قوى دليلِ الجذرِ.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ كسورًا.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ كسرٍ مقامًا يحوي جذورًا.

مفهومٌ أساسيٌّ .. خاصيةُ ضربِ الجذورِ

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ a و b ، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n ، حيثُ: $n > 1$:

1) إذا كانَ n عددًا زوجيًّا ، وكانَ $a \geq 0 \,, b \geq 0$ فإنَّ : $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

2) إذا كانَ n عددًا فرديًّا ، فإنَّ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$:

امثلة : $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt[3]{27 \times 4} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$

- **إذا أردت تبسيطُ جذرٍ زوجيٍّ لمقدارٍ جبريٍّ أُسُّهُ زوجيٌّ ، وكانَ أُسُّ المقدارِ الجبريِّ الناتجُ منَ التبسيطِ فرديًّا، فإنَّهُ...**

يجب أخذُ القيمةِ المُطلَقةِ للناتجِ، وبذلكَ لا يكونُ الجوابُ عددًا سالبًا؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ لا تكونُ سالبةً .

مثال 1

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad \sqrt{x^4} = x^2 \quad , \quad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3| \quad , \quad \sqrt[6]{(x\text{-}5)^6} = |x - 5|$$

إذا كانَ n عددًا فرديًّا ، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = a$

إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ثانيًا : تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ القسمةِ

مفهومٌ أساسيٌّ ... خاصيةُ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ b و a ، حيثُ $b \neq 0$ ، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n ،

حيثُ $n > 1$ ، فإنَّ : $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانَتْ جميعُ الجذورِ مُعرَّفةً.

يُمكِنُ التخلُّصُ منَ الجذرِ الذي في المقامِ عنْ طريقِ عمليةٍ تُسمّى إنطاقَ المقامِ ، وتتضمَّنُ ضربَ البسطِ والمقامِ في مقدارٍ جذريٍّ، بحيثُ لا يحوي ناتجُ الضربِ جذورًا في المقامِ كما في الجدولِ الآتي:

مثالٌ	ضربُ البسطِ والمقامِ في	المقامُ
$\frac{7}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$\frac{7}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{7\sqrt[3]{5^2}}{5}$	$\sqrt[n]{a^{n-x}}$	$\sqrt[n]{a^x}$

ثالثًا : العملياتُ على المقاديرِ الجذرية

يُطلَقُ على الجذورِ التي لها الدليلُ نفسُهُ والمجذورُ نفسُهُ اسمُ الجذورِ المُتشابِهةِ، ويُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجذريةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ جمعِ المقاديرِ الجبريةِ وطرحِها.

$\sqrt[3]{2c}$, $\sqrt{2c}$

جذرانِ غيرُ مُتشابِهينِ.

$5\sqrt[3]{2c}$, $-4\sqrt[3]{2c}$

جذرانِ مُتشابِهانِ.

يُسمّى كلٌّ منْ $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ مُرافِقًا للآخرِ ؛ لأنَّ ناتجَ ضربِهِما لا يحوي جذورًا.

فمثلًا : كلٌّ منْ $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ هوَ مُرافِقٌ للآخرِ ؛ لأنَّ :

$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = (3)^2 - (\sqrt{2})^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$= 9 - 2$	$(3)^2 = 9, (\sqrt{2})^2 = 2$
$= 7$	بالتبسيط

يُستعمَلُ المُرافِقُ لإنطاقِ بعضِ المقاماتِ في المقاديرِ الجذريةِ، وذلكَ بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ، ثمَّ تبسيطِ الناتجِ.

حلُّ المعادلاتِ الجذرية

أولًا : المعادلاتُ الجذريةُ

يُطلَقُ على المعادلاتِ التي تحوي مُتغيِّرًا تحتَ الجذرِ اسمُ المعادلاتِ الجذريةِ .

أمثلة :

$$4\sqrt{x+3} = 9$$

$$5x - 6 = \sqrt{1-2x}$$

$$\sqrt[3]{x+7} = -27$$

مفهوم أساسيّ ... خطواتُ حَلِّ المعادلاتِ الجذريةِ

يُمكِنُ حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- جعلُ الجذرِ وحدَهُ أحدَ طرفيِ المعادلةِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.
- رفعُ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ؛ تخلُّصًا منَ الجذرِ.
- حَلُّ المعادلةِ الناتجةِ.
- التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ.

تنتجُ معادلةٌ أخرى (خطيةٌ أوْ تربيعيةٌ) منْ رفعِ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ، ويُمكِنُ حَلُّ هذهِ المعادلةِ باستعمالِ طرائقِ حَلِّ المعادلاتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

ثانيًا :الحَلُّ الدخيلُ

ينتجُ أحيانًا منْ رفعِ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ ما حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ، ويُسمّى الحَلَّ الدخيلَ ؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الجذريةِ الأصليةِ.

- **يظهرُ الحَلُّ الدخيلُ غالبًا عندَ حَلِّ معادلاتٍ تحوي مُتغيِّرًا في طرفيْ كلٍّ منْها.**
- **يظهرُ عندَ حَلِّ معادلةٍ تحوي جذرًا في كلا طرفيْها.**

منْ أسبابِ وجودِ حَلٍّ دخيلٍ في أثناءِ حَلِّ المعادلةِ الجذريةِ رفعُ الطرفينِ إلى أُسٍّ زوجيٍّ ؛ لأنَّ القِيَمَ السالبةَ تلغى إشارتُها عندئذٍ، ما يُؤثِّرُ في الحَلِّ الأصليِّ.

ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

أولًا : تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ : هوَ مقدارٌ جبريٌّ يُمكِنُ كتابتُهُ في صورةِ كسرٍ بسطُهُ أو مقامُهُ مقدارانِ جبريانِ.

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العددُ 1 هوَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لكلٍّ منْ بسطِهِ ومقامِهِ.

بوجهٍ عامٍّ، يبدأُ تبسيطُ المقدارِ الجبريِّ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ، ثمَّ قسمةِ كلٍّ منْهُما على العواملِ المشتركةِ بينَهُما.

ثانيًا : ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ ضربِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ البسطِ في البسطِ وضربِ المقامِ في المقامِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ ... ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ثالثًا : قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ قسمةِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ ... قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ $b \neq 0$ ، $c \neq 0 , d \neq 0$ ، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

رابعًا : الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ

الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ هوَ كسرٌ يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ.

- **توجدُ أربعُ خطواتٍ يتعيَّنُ اتِّباعُها لتبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ:**

الخطوةُ 1 : كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ في صورةِ كسرٍ واحدٍ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

الخطوةُ 2 : كتابةُ الكسرِ الجبريِّ المُركَّبِ الناتجِ منَ الخطوةِ 1 في صورةِ قسمةِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ.

الخطوةُ 3 : ضربُ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

الخطوةُ 4 : قسمةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ، والتبسيطُ.

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

أولًا : المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ للمقاديرِ الجبريةِ

تعلمنا في هذا الدرس كيف أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ لحدَّينِ .

وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منْهُما تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةِ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ، عندئذٍ يكونُ

المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) : هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقدارينِ جبريينِ .

وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منْهُما إلى العواملِ، عندئذٍ يكونُ

المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) : هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

ثانيًا : جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

يُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ تمامًا لطريقةِ جمعِ الكسورِ وطرحِها.

فعندَ الجمعِ أوِ الطرحِ لمقدارينِ جبريينِ نسبيينِ متساويينِ في المقامِ

يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ، ويبقى المقامُ المشتركُ

ثمَّ يُبسَّطُ الناتجُ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا

مفهومٌ أساسيٌّ ... جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

إذا كانَتْ a, b, c مقاديرَ جبريةً، حيثُ $c \neq 0$ ، فإنَّ:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

يُمكِنُ أيضًا الجمعُ أوِ الطرحُ لمقداريْنِ جبريينِ نسبيينِ غيرِ متساويينِ في المقامِ، وذلكَ

بتوحيدِ المقامينِ أوّلًا عنْ طريقِ إيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقامينِ

ثمَّ ضربِ البسطِ والمقامِ لكلّ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في العواملِ اللازمةِ لجعلِ المقامِ مساويًا للمضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

ثمَّ تبسيطِ الناتجِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

ثالثاً : تبسيطُ الكسرِ المُركَّبِ

تعلمنا كيفَ أبسِّطُ الكسرَ المُركَّبَ الذي يحتوي بسطَهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على عمليةِ جمعٍ أوْ عمليةِ طرحٍ، وذلكَ بطريقتينِ:

الطريقة الاولى : كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ أوْ كليْهِما في صورةِ كسرٍ واحدٍ (إنْ لَزِمَ).

الطريقة الثانية : إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ التي في البسطِ والمقامِ جميعِها

ثمَّ ضربُ كلٍّ منْ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

ثم التبسيطُ.

حل المعادلات النسبية

أولًا : حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ بالضربِ التبادليِّ

يُطلَقُ على المعادلةِ التي تحوي مقدارًا جبريًّا نسبيًّا أوْ أكثرَ اسمُ المعادلةِ النسبيةِ

ويُمكِنُ استعمالُ الضربِ التبادليِّ لحَلِّ المعادلاتِ النسبيةِ إذا كانَتْ كلٌّ منْها في صورةِ تناسبٍ فقطْ.

ثانيًا : حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

يُمكن حل المعادلةَ النسبيةَ التي لا تكونُ في صورةِ تناسبٍ، وذلكَ بضربِ طرفيْ هذهِ المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ؛ تخلُّصًا منْ هذهِ المقاماتِ.

في بعضِ الأحيانِ ، تظهرُ حلولٌ دخيلة عندَ ضربِ طرفي المعادلةِ النسبيةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الأصليةِ.

أتذكر :

الحَلُّ الدخيلُ هوَ حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ.

ومنَ المُلاحَظِ في المعادلاتِ النسبيةِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يجعلُ أحدَ مقاماتِ المعادلةِ صفرًا

مقاييس التشتت

أولًا : التباين والانحراف المعياري

يُعرَّفُ تباينُ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n ، ووسطُها الحسابيّ μ ، بالصيغةِ الآتيةِ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

رموزٌ رياضيةٌ : الحرفُ اليونانيُّ σ يُقرَأُ : سيجما، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على الانحرافِ المعياري .

أمّا الرمزُ σ^2 فيُقرَأُ : سيجما تربيع، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على التباينِ.

توجدُ صيغةٌ أُخرى لإيجادِ التباينِ منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافِ المشاهداتِ عنِ الوسطِ الحسابيّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

أتذكر : تُستعمَلُ هذهِ الصيغةُ لتسهيلِ الحساباتِ في حالِ كانَتْ قيمةُ الوسطِ الحسابيِّ عددًا غيرَ صحيحٍ.

ثانيًا: التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

مفهومٌ أساسيٌّ ... التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

يُمكِنُ إيجادُ تباينِ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n ، ووسطُها الحسابيُّ μ ، إذا كانَتْ مُنظّمةً في جداولَ تكراريةٍ، حيثُ f عددُ مَرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ، باستعمالِ إحدى الصيغتينِ الآتيتينِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

ثالثًا : تحويلُ البياناتِ

مفهومٌ أساسيٌّ ... تحويلُ البياناتِ

عندَ تحويلِ مجموعةٍ منَ البياناتِ باستعمالِ العلاقةِ $y = ax + b$: ، حيثُ a و b عددانِ حقيقيانِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ، و y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ ، فإنَّهُ:

- يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ μ_y باستعمالِ العلاقةِ :
  $\mu_y = a\mu_x + b$ حيثُ μ_x الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.
- يُمكِنُ إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ σ_y باستعمالِ العلاقةِ
  $\sigma_y = |a|\sigma_x$، حيثُ σ_x الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

يستعمل تحويل البيانات أحياناً لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهيلاً لإجراء الحسابات.

الجداول التكرارية ذاتُ الفئات

اولاً : إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ

تعلّمْتُ سابقًا أنَّ :

الفئاتِ تُستعمَلُ لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا.

وأنَّ **الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ**، بحيثُ تُقابِلُ كلَّ فئةٍ عدد البياناتِ التي تحويها (التكرارُ).

أتذكَّرُ:

البياناتُ المتصلةُ هيَ بياناتٌ قِيَمُها المُمكِنةُ غيرُ قابلةٍ للعَدِّ، لكنَّها قابلةٌ للقياسِ، ويُمكِنُ تقريبُها لتُعطِيَ درجةً منَ الدقَّةِ، ومنْ أمثلتِها: الطولُ، والكتلةُ، ودرجةُ الحرارةِ.

جو أكاديمي
الصفوف

ثانيًا : إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ

تعلّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ أيضًا لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا.

وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلَّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ).

أتذكر :

البيانات المنفصلة هي بيانات تأخذ قيماً مُحددة قابلة للعَد، مثل: عدد الأخوة، وعدد الكتب، وعدد الأشجار.

ثالثًا : تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

مفهومٌ أساسيٌّ .. تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغة الآتية :

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيث :

x: مركزُ الفئة .

f: التكرار المقابل لكل فئة .

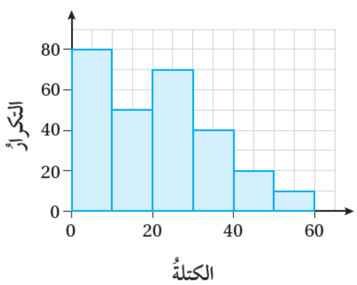
- **لتقديرِ المنوالِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ**، أجدُ مركزَ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا.
- **لتقديرِ وسيطِ بياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ**، أجدُ مركزَ الفئةِ التي تكرارُها التراكميُّ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي $\frac{n+1}{2}$

، حيثُ n مجموعُ التكرارات.

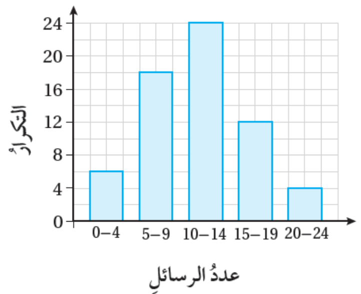
المُدرجات التكرارية

المُخطَّطاتُ التكراريةُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُخطَّطاتِ التكراريةَ هيَ أكثرُ الطرائقِ شيوعًا لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ والمُمثَّلةِ في جداولَ تكراريةٍ.



أستعملُ تدريجًا متصلًا للبياناتِ المتصلةِ.



أستعملُ تدريجًا منفصلًا للبياناتِ المنفصلةِ.

يُطلَقُ على المُخطَّطاتِ التكراريةِ المُستعمَلةِ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُمثَّلةِ في جداولَ تكراريةٍ اسمُ المُدرَّجاتِ التكراريةِ .

تعلمنا تمثيلَ نوعينِ منْها، هما : المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ ، والمُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ .

أولًا : المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ

عندَ تمثيلِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ عنْ طريقِ استعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ، يجبُ استعمالُ تدريجٍ متصلٍ بالمحورِ الأفقيِّ، وهذا يعني عدمَ وجودِ فراغاتٍ بينَ أعمدةِ المُدرَّجِ.

ثانيًا :المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ

تُجمَّعُ البياناتُ المتصلةُ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ غيرِ متساويةٍ في الطولِ. وفي هذهِ الحالةِ، يتعيَّنُ تمثيلُ هذهِ البياناتِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ غيرِ مُتساويةِ الطولِ.

ولكنْ، إذا مُثِّلَتِ البياناتُ باستعمالِ تكراراتِها، فإنَّ التمثيلَ الناتجَ يكونُ مُضلِّلًا ؛ لأنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ لا تكونُ متناسبةً معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ. وهنا تظهرُ الحاجةُ إلى إيجادِ الكثافةِ التكراريةِ لكلِّ فئةٍ، وذلكَ بقسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها كما يأتي:

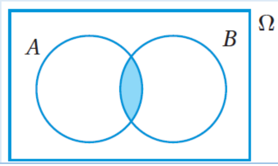
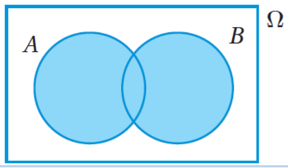
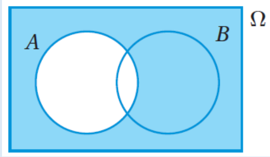
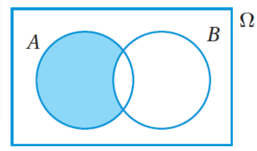
$$\text{(الكثافة التكرارية)} = \frac{\text{(تكرار الفئة)}}{\text{(طول الفئة)}}$$

عندَ تمثيلِ الجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ المتساويةِ في الطولِ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ، فإنَّ المحورَ y يُسمّى الكثافةَ التكراريةَ، وإنَّ ارتفاعَ كلِّ عمودٍ يُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ لفئتِهِ.

يُمكِنُ استعمالُ المُدرَّجاتِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ **لتفسيرِ البياناتِ التي يُمثِّلُها المُدرَّجُ التكراريُّ.**

الاحتمالات وأشكال فِن

أولًا : التعبيرُ بالرموزِ عنْ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ فِنْ

ماذا تمثل ؟	الرمز	الشكل	أتعلم
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ تقاطعَ الحادثِ A والحادثِB	$A \cap B$		تقاطعُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَهُما معًا.
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ اتحادَ الحادثِ A والحادثِ B	$A \cup B$		اتحادُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَ الحادثِ A ، أوْ وقوعَ الحادثِ B ، أوْ وقوعَ الحادثينِ معًا.
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشكلِ المجاورِالحادثَ المُتمِّمَ للحادثِ A	$\overline{A}$		لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ $\overline{A}$ يعني عدمَ وقوعِ الحادثِ A
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في الشكلِ المجاورِ وقوعُ الحادثِ A فقط، وعدمَ وقوعِ الحادثِ B	$A - B$		يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ الحادثِ $A - B$ بالرمزِ $A \cap \overline{B}$

ثانيًا : إيجادُ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ مُمثَّلةٍ بأشكالِ فِنْ

تعلّمْتُ سابقًا أنّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيّ.

$$P(A) = \frac{\text{(عددَ عناصرِ الحادثِ } A\text{)}}{\text{(عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيّ)}}$$

بما أنَّ **الفضاءَ العينيَّ Ω** هوَ مجموعةٌ تحوي جميعَ النواتجِ التي يُتوقَّعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشوائيةٍ ما، **فإنَّ احتمالَ الفضاءِ العينيِّ هوَ 1** ؛ أيْ إنَّ $P(\Omega) = 1$ ولهذا، فإنَّ احتمالَ الحادثِ المُتمِّمِ لأيِّ حادثٍ في الفضاءِ العينيّ، مثلَ A ، هوَ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A .

مفهومٌ أساسيٌّ .. احتمالُ الحادثِ المُتمِّم

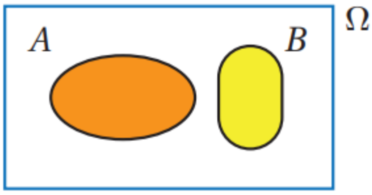
بالكلماتِ: احتمالُ وقوعِ الحادث المتمم A هوُ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادث A .

بالرموزِ: لأيِّ حادثٍ (A) في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

ثالثًا : الحوادثُ المتنافيةُ

الحوادثُ المتنافيةُ هيَ الحوادثُ التي لا يُمكِنُ وقوعُها معًا؛ ما يعني عدمَ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَها.
فمثلًا : عندَ رميِ حجرِ نردٍ مَرَّةً واحدةً، فإنَّ حادثَ ظهورِ العددِ 5 لا يُمكِنُ أنْ يقعَ معَ حادثِ ظهورِ العددِ 6 في الوقتِ نفسِهِ، وهذا يعني أنَّ تقاطعَهُما هوَ $\emptyset$، وأنَّ احتمالَ تقاطعِهِما هوَ صفرٌ.



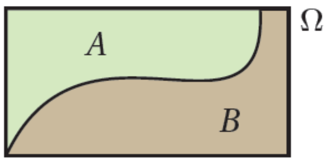
الحادثانِ A و B متنافيانِ

رابعاً : الحوادثُ المتنافيةُ الشاملةُ

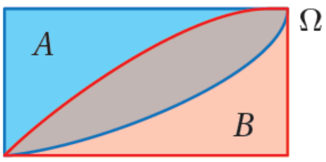
الحوادثُ الشاملةُ هيَ الحوادثُ التي يُشكِّلُ اتحادُ نواتجِها المُحتمَلةِ الفضاءَ العينيَّ كاملًا، فمثلاً : عند إلقاء حجر نرد، فإن حادث ظهور عدد أكبر من 3 وحادث ظهور عدد أقل من 5 يُمثلان حادثين شاملين.

قدْ تكونُ بعضُ الحوادثِ متنافيةً وشاملةً فمثلًا : عندَ رميِ حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ وحادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ يُمثِّلانِ حادثينِ متنافيينِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ أنْ يقعا معًا. وهما أيضًا حادثانِ شاملانِ؛ لأنَّ نواتجَهُما المُحتمَلةَ تُشكِّلُ الفضاءَ العينيَّ كاملًا.

يُظهِرُ شكلا فِنْ الآتيانِ كُلًّ منَ الحوادثِ المتنافيةِ، والحوادثِ الشاملةِ، والحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ:



الحادثُ A والحادثُ B متنافيانِ وشاملانِ.



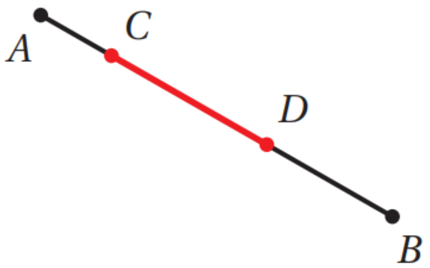
الحادثُ A والحادثُ B شاملانِ، لكنَّهُما ليسا متنافيين.

إذا كانَتِ الحوادثُ متنافيةً وشاملةً، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1.

الاحتمال الهندسي

أولًا : الاحتمالُ الهندسيُّ: الأطوالُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{AB}$ التي تحوي القطعةَ المستقيمةَ $\overline{CD}$ ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$ ، ولتكنْ K ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K على $\overline{CD}$ يساوي نسبةَ طولِ $\overline{CD}$ إلى طولِ $\overline{AB}$ ؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ، وجميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{CD}$ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

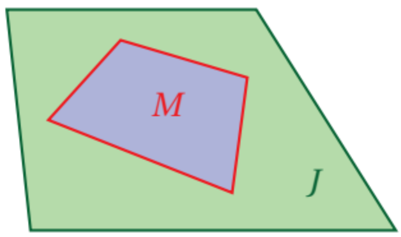


$$P(\text{وقوع } K \text{ على } \overline{CD}) = \frac{CD}{AB}$$

- يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ على $\overline{AB}$.

ثانيًا : الاحتمالُ الهندسيُّ : المساحاتُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنطقةَ J التي تحوي المنطقةَ M إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ في المنطقةِ J ، ولتكنْ K ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K في المنطقةِ M يساوي نسبةَ مساحةِ المنطقةِ M إلى مساحةِ المنطقةِ J ؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في المنطقةِ J تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في المنطقةِ M تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.



$$P(\text{وقوع } K \text{ في المنطقة } M) = \frac{(\text{مساحة المنطقة } M)}{(\text{مساحة المنطقة } J)}$$

- يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ في المنطقةِ J .

ثالثًا : الاحتمالُ الهندسيُّ : الزوايا

إذا دُوِّرَ المُؤشِّرُ في القرصِ المجاورِ عشوائيًّا، فإنَّ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ يساوي نسبةَ قياسِ زاويةِ القطاعِ الأخضرِ إلى مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ؛ لأنَّ جميعَ المواقعِ في الدائرةِ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ المواقعِ في القطاعِ الأخضرِ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{توقف المؤشر عند القطاع الأخضر}) = \frac{(\text{زاوية القطاع الأخضر})}{(\text{مجموع الزوايا حول مركز الدائرة})}$$

- يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ أيِّ موقعٍ في الدائرةِ؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ موقعٍ يتوقَّفُ عندَهُ المُؤشِّرُ.

الاختبار النهائي للصف التاسع

السؤال الاول: ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1) أبسط صورة للمقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ هي:

a. $\frac{2x^2}{3}$

b. $\frac{2x}{3}$

c. $\frac{1}{x^2}$

d. $\frac{x}{2}$

2) حل المعادلة $\sqrt{3x-11}+2=9$ هي:

a. 44

b. 6

c. 20

d. 22

3) أبسط صورة للمقدار $\frac{6}{x^2+6x+8} \times \frac{2x+8}{3}$ هي:

a. $\frac{4}{x+2}$

b. $\frac{2}{3(x+2)}$

c. $\frac{2}{x+2}$

d. $\frac{2}{7(x+2)}$

4) أبسط صورة للمقدار $\frac{y}{8x^2} + \frac{5}{6xy}$ هي:

a. $\frac{20x+3y^2}{24yx^2}$

b. $\frac{5+y}{6xy+8x^2}$

c. $\frac{20x+y^2}{24yx^2}$

d. $\frac{5-y}{6xy+8x}$

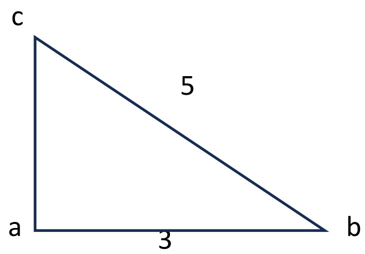
5) حل المعادلة $\sqrt{x} + 4 = 12$ هي :

a. 64

b. 24

c. 16

d. 12



6) $cos\ c$ في المثلث, هي:

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{5}{4}$

c. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{3}{4}$

7) $sin(30)$ يساوي:

a. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

b. $-\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) اذا كان $cos(55) = 0.573$ فان قيمة $sin(35)$ تساوي:

a. -0.375

b. 0.573

c. 0.5

d. $0 \cdot 753$

9) أبسط صورة للمقدار $\frac{x-3}{2x} \div \frac{x-3}{6x^2}$ هي:

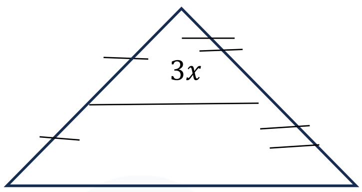
a. $\frac{1}{6x}$

b. $3x$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{3x}$

10) قيمة x في المثلث المجاور



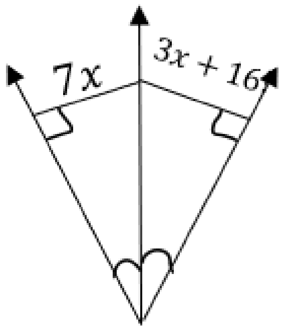
a. 36

b. 18

c. 27

d. 9

11) قيمة x في الشكل المجاور :



a. -4

b. 5

c. 4

d. 3

12) قيمة المقدار الجذري $(5\sqrt{3}+6)(5\sqrt{3}-6)$ هي:

a. 39

b. -11

c. 111

d. 189

13) أبسط صورة للمقدار $((-3x^2)^4)^{-1}$ هي:

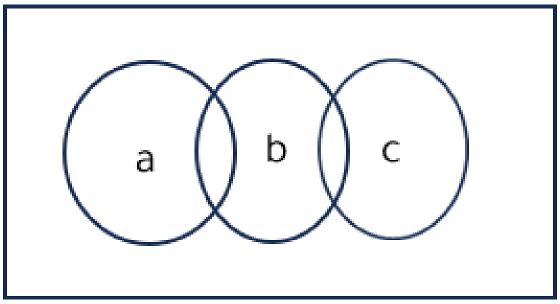
a. $\frac{1}{81x^8}$

b. $\frac{1}{12x^8}$

c. $\frac{-1}{81x^8}$

d. $81x^8$

14) الحادثان c,a في الشكل هما :



a. حادثان شاملان

b. حادثان متنافيان

c. حادثان متقاطعان

d. حادثان متنافيان و شاملان

15) البيانات التالية تمثل عدد الاجهزة الكهربائية التي بيعت متجر اجهزة كهربائية خلال خمسة اشهر (18,22,21,25,24) أوجدي الوسط الحسابي للاجهزة الكهربائية :

a. 20

b. 24

c. 22

d. 15

16) التباين لعدد الاجهزة المبيعة في هذه الاشهر:

a. 5

b. 7

c. 6

d. 9

17) الانحراف المعياري لعدد الاجهزة المبيعة لهذه الاشهر:

a. $\sqrt{5}$

b. 3

c. 2

d. $\sqrt{6}$

18) يعبر عن الكثافة التكرارية بـ:

a. $\frac{\text{طول الفئة}}{\text{الوسط الحسابي}}$

b. $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$

c. $\frac{\text{الوسط الحسابي}}{\text{طول الفئة}}$

d. $\frac{\text{طول الفئة}}{\text{تكرار الفئة}}$

19) يمثل الشكل التالي ملعب كرة قدم على شكل مستطيل مساحته $(x^2 - 4)$, اذا كان طول الملعب $\frac{x^2-x-2}{x+1}$, المقدار الجبري الذي يمثل عرض الملعب هو:

$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

a. $x - 2$

b. $x + 2$

c. $(x + 2)(x - 2)^2$

d. $(x + 2)(x - 2)$

20) مثلث قائم الزاوية اذا كان فيه $\sin A = \frac{2}{3}$ فان $\cos A$ تساوي:

a. $\frac{5}{9}$

b. $\frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

c. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

d. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

21) اذا كان $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فان $\tan A$ يساوي:

a. $\sqrt{3}$

b. $-\sqrt{3}$

c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

22) حل المعادلة $\frac{x-2}{5} = \frac{7}{x}$ هي:

a. $\{-5,2\}$

b. $\{7,3\}$

c. $\{2,3\}$

d. $\{7,-5\}$

23) مساحة المستطيل الذي طوله $(x+3)$ و عرضه $(x-2)$ هي:

a. x^2+5x+6

b. x^2+x+6

c. x^2+5x-6

d. x^2+x-6

24) أبسط صورة للمقدار $\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}{1+\frac{4}{b}}$ هي :

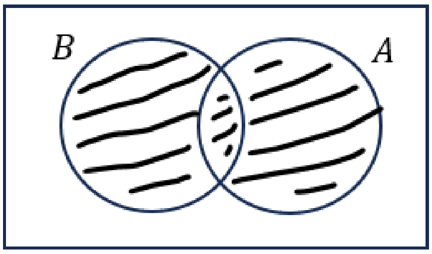
a. $\frac{b+2a}{(ab+4)}$

b. $\frac{b+2a}{a(b+4)}$

c. $\frac{ab+2a}{a(b+4)}$

d. $\frac{ab+2}{a(b+4)}$

25) تعبر المنطقة المظللة في شكل فن عن:



a. $A - B$

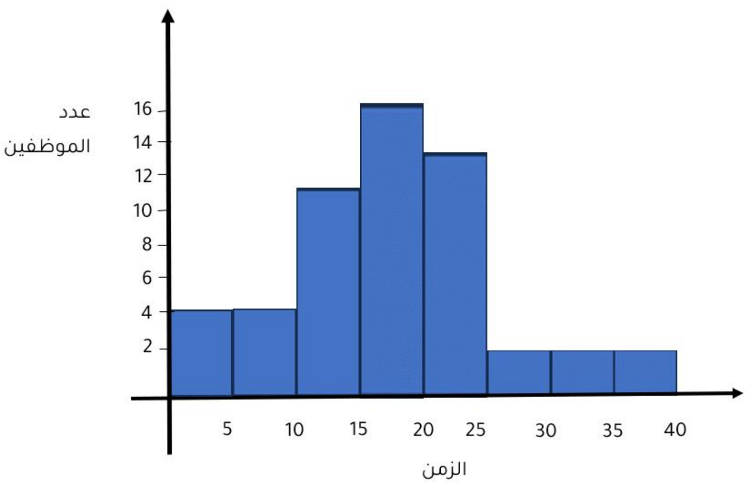
b. $A \cup B$

c. $\overline{A \cup B}$

d. $A \cap B$

السؤال الثاني:

يبين المدرج التكراري المجاور الزمن بالدقائق الذي يستغرقه موظفو احدى الشركات للوصول الى مكان العمل , اجيب عن ما يلي بالاعتماد على الشكل:



1) عدد موظفي الشركة.

2) عدد موظفي الشركة الذين يصلون الى العمل باقل من 25 دقيقة.

3) عدد الموظفين الذين يستغرق وصولهم الى مكان العمل بين 10-25 دقيقة .

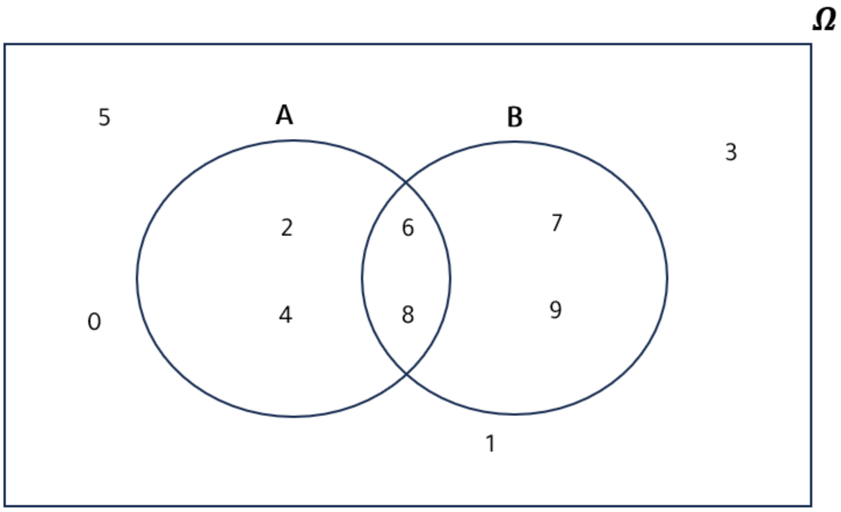
4) عدد الموظفين الذين يصلون الى مكان العمل بزمن اكثر من 30 دقيقة.

5) ضع العنوان المناسب للمدرج التكراري.

السؤال الثالث:

كتبت الاعداد الصحيحة من 0-9 على مجموعة البطاقات ثم اختيرت بطاقة عشوائيا و مثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحتوي على الحادثين A, B

بشكل فن المجاور , اوجد ما يلي:



1) $P(A)$

2) $P(B)$

3) $P(A \cap B)$

4) $P(A \cup B)$

5) $P(\bar{A})$

6) $P(\bar{B})$

7) $P(\overline{A \cap B})$

8) $P(\overline{A \cup B})$

9) $P(B - A)$

الفضاء العيني.